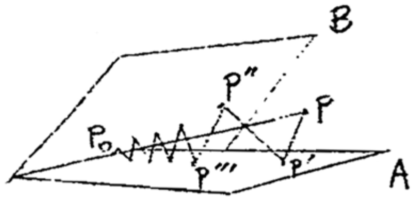
836. Hilbert space ニ於ケル一定理

中野 秀五郎 (東大)

三次元空間ニテ今二平面 A, B アリテ、其ノ交線ヲ l トスル。P ヲコノ空間内ノ任意ノ点トスレバ、P ヨリ先ヅ A ヘ

ノ正射影 P' ヲ求メ、P' ヨリ B ヘノ正射影 P''、次ノデ P'' ヨリ B ヘ正射影 P''' ト、以下コノ如リニ続ケルトキハ、$P^{(n)}$ ハ P ヨリ l ヘノ正射影 P_0 ニ収斂スル。此ノ如キコトガ一般 *Hilbert space* ニテモ云ハレル。



$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ヲ *Hilbert space* 内ノ二ツノ *closed linear manifolds* トスル。又 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ノ共通部分即チ *Durchschnitt* ヲ $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ ニテ表ハスコトヽスレバ、コレモ亦 *closed linear manifold* ナルコトハ明カナリ。

次ニ $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ 及ビ $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ ニ對スル *Projections* ヲ夫々 $P_{\mathfrak{M}}, P_{\mathfrak{N}}, P_{\mathfrak{M}\mathfrak{N}}$ ニテ表ハスコトヽスレバ、次ノ定理成立ス。

定理. $$P_{\mathfrak{M}\mathfrak{N}} = \lim_{n\to\infty} (P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}})^n = \lim_{n\to\infty} (P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}})^n$$

証明. $H = P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}}$ ト置ケバ、H ハ明カニ *bounded Hermitean* デアル。然カモ、任意ノ *element* f ニ對シ

$$(Hf, f) = (P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} f, f) = \| P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} f \|^2 \geqq 0$$

$$\| Hf \| \leqq \| f \|$$

ナルヲ以テ、H ノ *spectralization* ハ

$$H = \int_0^1 \lambda \, dE(\lambda)$$

ナル形ニテ與ヘラレル。故ニ

$$H^n = \int_0^1 \lambda^n \, dE(\lambda)$$

従ッテ

$$\lim_{n\to\infty} H^n = E(L)$$

$E(L)$ ハ $Hf = f$ ナル総テノ f ヨリナル closed linear manifold ノ Projection ナリ。然ルニ $Hf = f$ ナル f ハ $P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} f = f$. 従ッテ

$$\|P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} f\| = \|P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} f\| = \|P_{\mathfrak{N}} f\| = \|f\|$$

トナルヲ以テ

$$P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} f = P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} f = P_{\mathfrak{N}} f = f$$

即チ $P_{\mathfrak{N}} f = P_{\mathfrak{M}} f = f$ ナルガ如キ f ナリ。故ニ

$$E(L) = P_{\mathfrak{M}\mathfrak{N}}$$

ナリ。従ッテ

$$P_{\mathfrak{M}\mathfrak{N}} = \lim_{n\to\infty} H^n = \lim_{n\to\infty} P_{\mathfrak{N}} (P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}})^n$$

$$P_{\mathfrak{M}\mathfrak{N}} = P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{M}\mathfrak{N}} = \lim_{n\to\infty} (P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}})^{n+1}$$

同様ニ

$$P_{\mathfrak{M}\mathfrak{N}} = \lim_{n\to\infty} (P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}})^{n+1}$$

ヲ得ル。

以上ノ如ク H ノ spectralization ヲ用フルトキハ簡単ニ証明サレルモ、spectralization ヲ用ヒザル elementary ナ証明ハ未ダ私ニハ得ラレテナイ。

何ントカ elementary ニ証明出来ナイモノカシラ？

証明： 第190号 "Covering theorem ニ就テ" 内ノ補定理、有界点集合Aアリテ、其ノ各点ニ其ノ合点ヲ含ム正方形ガ……ノ所ヲ含ムヲ中心トスルニ変ヘル。若シ此処ヲコノママ単ニ含ムトスレバ、三倍ヲ（3＋ε）倍ト置換ヘレバ可ナリ。此処ニεハ任意ノ正数トス。